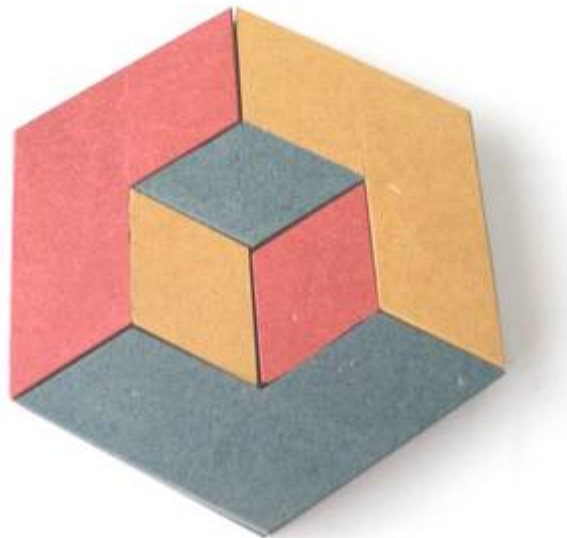


Albert Gübeli



Visualisierung des euklidischen
4-dimensionalen Raumes

Mein Dank gilt Hansjörg Illi für Anregungen und inhaltliche Korrekturen.

Und wenn wir uns in der Welt von vier Dimensionen sehen oder fühlen, werden wir sehen, dass die Welt von drei Dimensionen in Wirklichkeit nicht existiert und nie existiert hat; dass sie eine Schöpfung unserer eigenen Phantasie war, ein Phantom, eine optische Täuschung, ein Wahn – alles, was man will, nur eben nicht die Wirklichkeit.

P.D.Ouspensky
Tertium Organum, 1912

Visualisierung des vierdimensionalen Raumes
von Albert Gübeli
© 2009 albinegri Schriftenreihe Nr.5d

Inhalt

Einleitung	4
Der 3-dimensionale Raum	4
Der 4-dimensionale Raum	6
Entwicklung von Puzzles mit simultanen Zwangsmechanismen	13
Meine Erkenntnisse	15
HEX-LÉON	16
RHOMBO-LÉON	18
Literaturverzeichnis und Bezugsquellen	20

Einleitung

In Flächenland (1) wurde die Welt in der Fläche beschrieben und die Probleme der Flachländer aufgezeigt, die durch Betrachtung mit unserer räumlichen Sichtweise plötzlich verschwinden.

In der Literatur (2-4) wird immer wieder darauf hingewiesen, wie unsere beschränkte räumliche Wahrnehmung aus dem Blickwinkel eines höheren Wesens sein könnte.

Unter dem Begriff Dimension verstehen wir die ursprüngliche Bedeutung von Dimensio räumliches Mass in verschiedenen (oder auch allen möglichen) Richtungen.

Der 3-dimensionale Raum

Bild 1 zeigt links den uns vertrauten 3-dimensionalen Raumteil und das Bild 1 rechts zeigt den ganzen Raum mit den 6 Richtungen x , $-x$, y , $-y$, z , $-z$, also den 6-dimensionalen Raum welcher acht 3-dimensionale Räume definiert. Die diagonal gegenüberliegenden Räume haben keine gemeinsame Fläche.

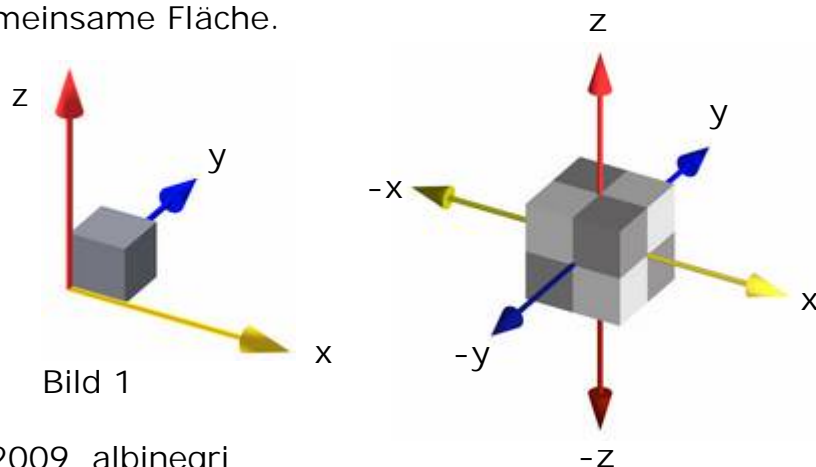


Bild 2 zeigt zwei Objekte (Würfelhälften) in gegenüberliegenden Räumen, der eine mit nur positiven Richtungen der andere mit den gleichen Werten aber negativen Richtungen. Die Objekte sind nicht gleich sondern erstaunlicher Weise rechts- und linkshändig. Rechts- und linkshändige Würfelhälften können nicht zu einem Würfel zusammengefügt werden. Fazit mit 6 Richtungen zerfällt der ganze Raum um das Zentrum in 4 rechtshändige und 4 linkshändige Räume. Der ganze Raum kann nicht mit 8 gleichhändigen Räumen beschrieben werden.

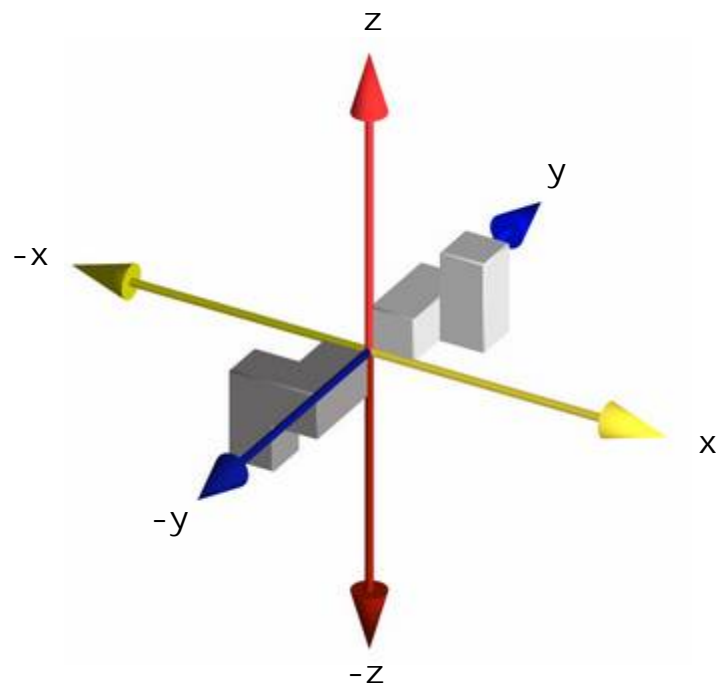


Bild 2

Der 4-dimensionale Raum

Anhand von Bildern möchte ich den 4-dimensionalen Raum vorstellen mit den Winkeln zwischen den 4 Richtungen von $109,47122^\circ$. Bild 3 zeigt wie der Winkel durch Scherung entsteht.

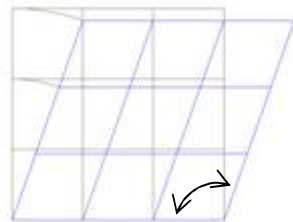


Bild 3

Bild 4 zeigt die Darstellung des 4-dimensionalen Raumes von vorne und von hinten. Vier 3-dimensionale Rhomboederräume grün, rot, blau und gelb bilden den 4-dimensionalen Raum, das Rhombendodekaeder (5,7).

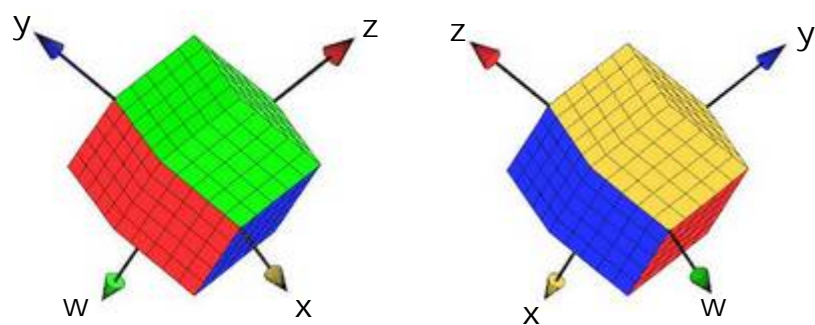


Bild 4
Ansicht von vorn, von hinten

Der rote Rhomboederraum wird mit den Richtungen x, y, w , der grüne Raum mit den Richtungen x, y, z , der gelbe Raum mit den Richtungen y, z, w und der blaue Raum mit den Richtungen x, z, w definiert. Jeder der vier 3-dimensionalen Rhomboederräume hat eine Fläche mit den drei anderen 3-dimensionalen Rhomboederräumen gemeinsam.

Der ganze Raum um das Zentrum kann mit den vier positiven Richtungen beschrieben werden die Händigkeit spielt dabei keine Rolle.

Werden nun die vier 3-dimensionalen Rhomboederräume mit den negativen Richtungen gebildet entstehen 4 weitere gegenüberliegende 3-dimensionale Rhomboederräume.

Bild 6 zeigt die acht 3-dimensionalen Rhomboederräume, links die 4 positiven und rechts die 4 negativen je nach Definition.

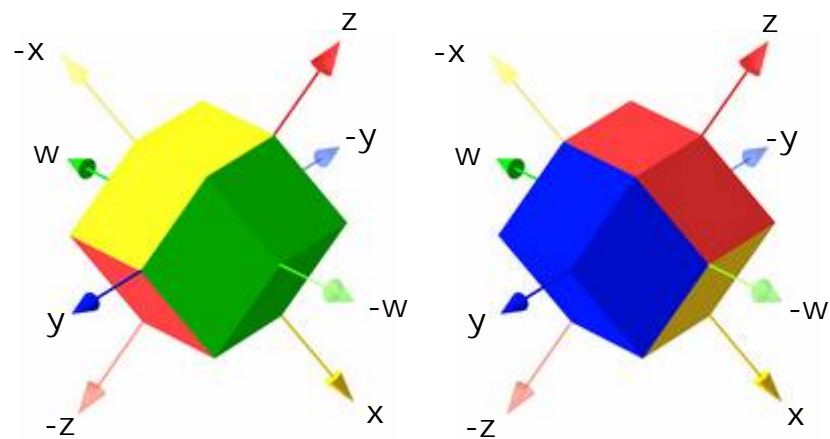


Bild 6

Die gegenüberliegenden vier negativen 3-dimensionalen Rhomboederräume haben keine gemeinsamen Flächen mit den positiven, bilden aber zusammen die zwei deckungsgleichen Rhombendodekaeder des 8-dimensionalen Raumes.

Die acht 3-dimensionalen Rhomboederräume bilden ein positives und ein negatives Rhombendodekaeder, dabei ändern sich die Händigkeiten, wie im 6-dimensionalen Raum.

Bild 7 zeigt ein linkshändiges Objekt (gelb) im positiven Rhomboederraum und das entsprechende Objekt mit negativen Werten (gelb transparent) im negativen Rhomboederraum welches wie erwartet rechtshändig ist.

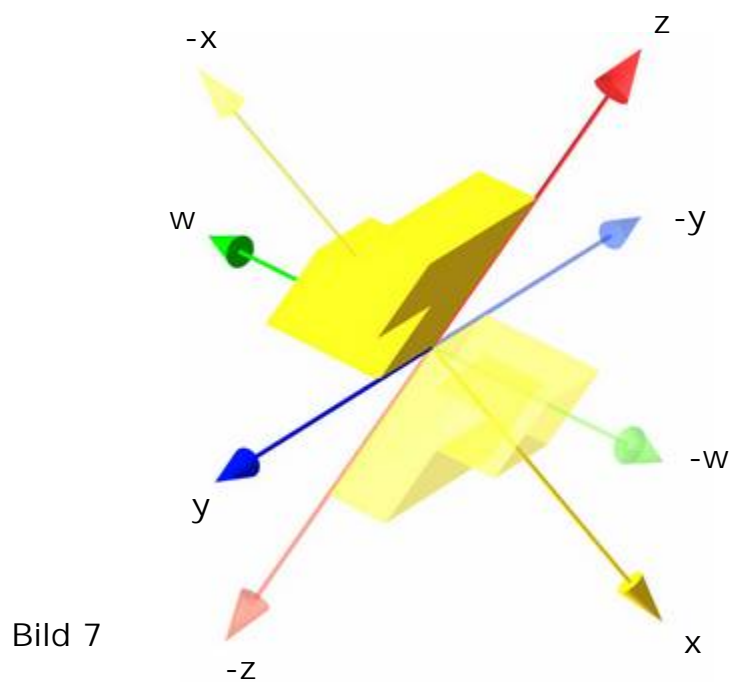


Bild 7

Aber im Gegensatz zum 6-dimensionalen Raum erschliessen die positiven als auch die negativen Richtungen im 4-dimensionalen den ganzen Raum um das Zentrum, mit anderen Worten der 4-dimensionale Raum ist homogen.

Daraus ziehe ich den Schluss, dass der 4-dimensionale Raum aus zwei gleichwertigen, einem positiven und einem negativen 4-dimensionalen Rhombendodekaederraum besteht die sich durch die Händigkeit unterscheiden.

Bild 8 zeigt den 4-dimensionalen positiven Raum mit einem 5-er Koordinatennetz.

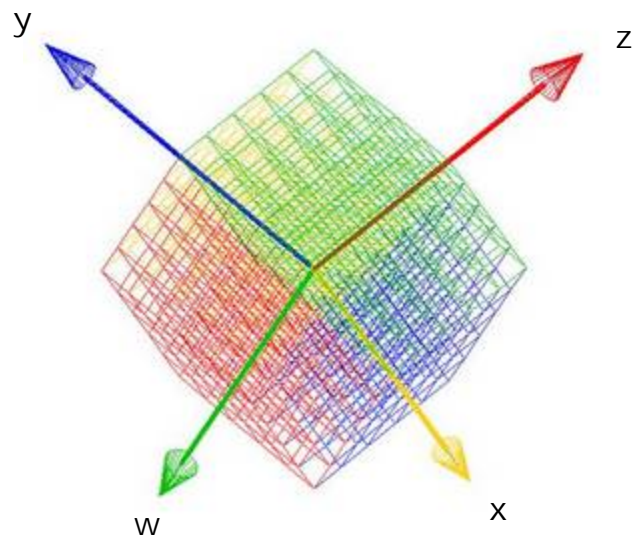


Bild 8

Wir betrachten nun das 4-dimensionale 5-er Koordinatennetz aus verschiedenen Richtungen. Als erstes in der Richtung des Strahles w wie in Bild 9. Bilden wir diese Netz auf der Ebene ab, entsteht ein uns bekanntes Isometrisches Koordinatensystem.

Erste Folgerung: Um die ebene Fläche bis zur Unendlichkeit ohne negative Richtungen abzubilden, braucht es mindesten 3 Richtungen.

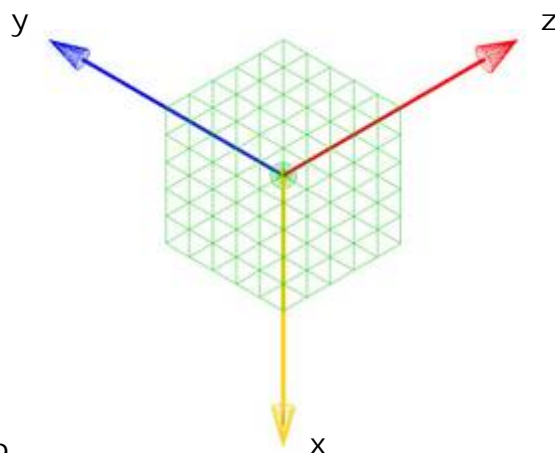


Bild 9

Betrachten wir das 4-dimensionale 5-er Koordinatennetz in Richtung einer Winkelhalbierenden von 2 Strahlen wie in Bild 10, x/w oder y/z , entsteht das uns vertraute kartesische Koordinatennetz.

Zweite Folgerung: Um den Raum bis zur Unendlichkeit ohne negative Koordinaten abzubilden, braucht es mindestens 4 Koordinaten.

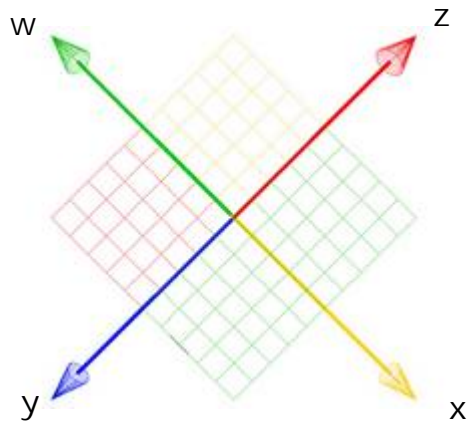
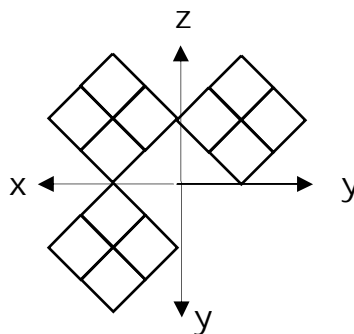


Bild 10

Im Studium haben wir gelernt, dass räumliche Körper durch Auf-, Grund- und Seitenriss bestimmt sind.

Aufgabe: Aufriss Seitenriss



Grundriss

Wie sieht der entsprechende
konvexe Körper aus?

Es wird Sie kaum überraschen, dass als Lösung der inzwischen uns bekannte 4-dimensionale Raumkörper das Rhombendodekaeder auftaucht. In Bild 11 zeigen die grauen Flächen den uns vertrauten 3-dimensionalen Raum in der Perspektive. Die auf die drei grauen Raumflächen projizierten Schatten (Licht in der Richtung der Strahlen x , y und z) des 4-dimensionalen Rhombendodekaeders zeigen die Umrisse von Auf-, Grund- und Seitenriss.

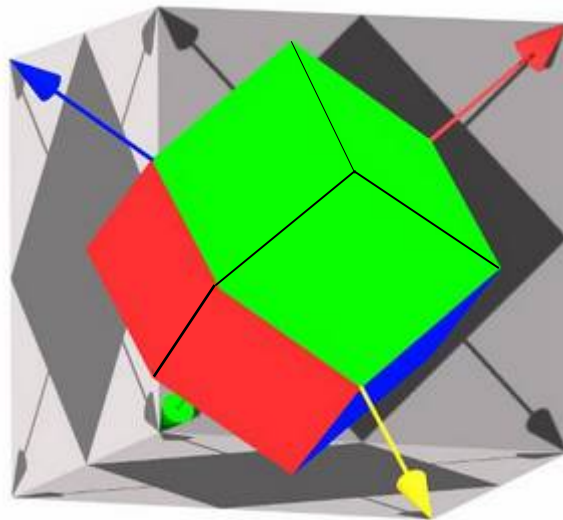


Bild 11

Nun haben wir die Grundlagen erarbeitet, um Erfahrungen mit simultan zwangsbewegten Teilen bei der Entwicklung meiner Puzzles aufzuzeigen.

Entwicklung von Puzzles mit simultanen Zwangsmechanismen

Ich habe mir angeeignet, bei meinen Entwicklungen von Mechanismen, in der Ebene, im 3-dimensionalen Raum und im 4-dimensionalen Raum zu arbeiten.

Dabei bin ich auf interessante Erkenntnisse gestossen. In der Ebene braucht es genau 3 gleiche Teile, um einen funktionsfähigen simultanen Zwangsmechanismus zu erzeugen.

Bild 12 zeigt eine Ausführung von unendlich vielen Ausführungsvarianten. Ein Variantenblock wird in der Folge anhand des Puzzles HEX LÉON (8) aufgezeigt.

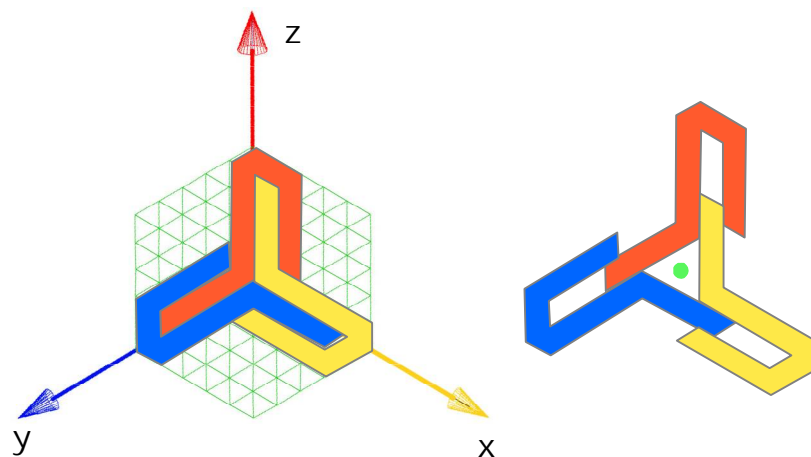


Bild 12

Im kartesischen Koordinatensystem gibt es nur lineare Zwangsmechanismus in zwei Richtungen (6), Bild 13.

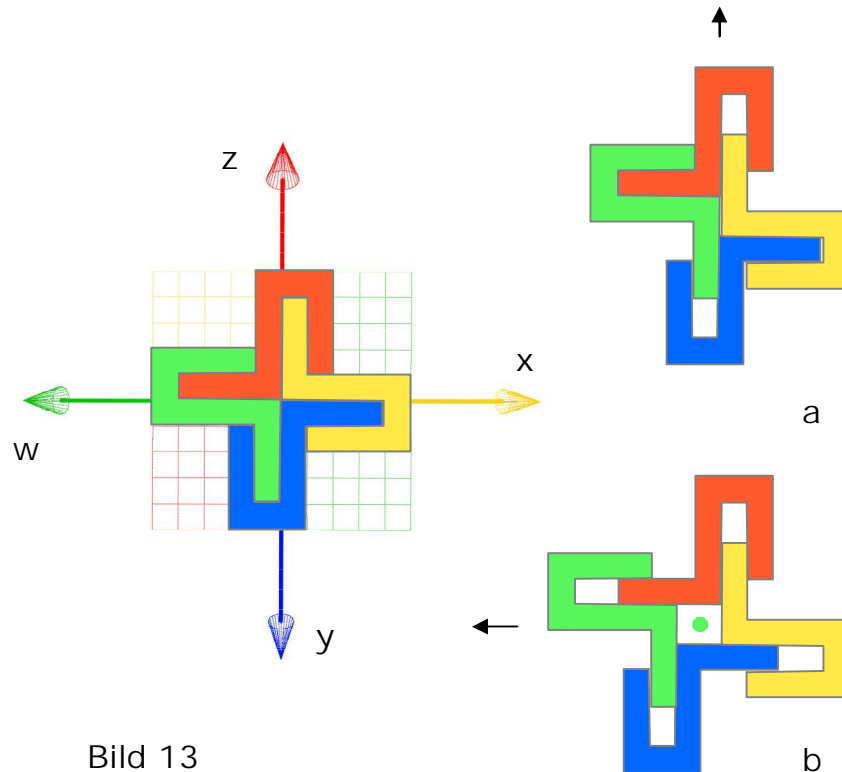


Bild 13

Bewusst habe ich die Mechanismen auf die Abbildungen des 4-dimensionalen Raumes gelegt. Nun passiert etwas ganz Überraschendes. Wird der Mechanismus Bild 13 in den 4-dimensionalen Raum überführt, funktioniert er mit genau 2 gleichen rechtshändigen und 2 linkshändigen Teilen. Dabei greift das linkshändige in das rechtshändige Teil und umgekehrt. Es gibt keinen Zwangsmechanismus im Raum mit 4 gleichen Teilen.

Dies wird in der Folge anhand des Puzzles RHOMBO LÉON (9) einer mögliche Ausführungsform von unendlich vielen Varianten aufgezeigt.

Meine Erkenntnisse

Man kann es drehen und wenden, wie man will, es gibt nur simultane Zwangsmechanismen mit folgenden Eigenschaften:

In der Linie 2 gleiche Teile

In der Ebene 3 gleiche Teile
 rechts- oder linkshändig

Im Raum 4 Teile, je 2 gleiche Teile
 rechts- und linkshändig

Ich habe bis heute keinen Zwangsmechanismus mit mehr als vier Teilen im Raum gefunden auch in Systemen mit mehr als 4 Richtungen nicht.

Die Richtungen der Zwangsmechanismen bestimmen gemäss unserer Definition die Dimensionen. Daraus folgt, dass der Raum 4-dimensional sein muss.

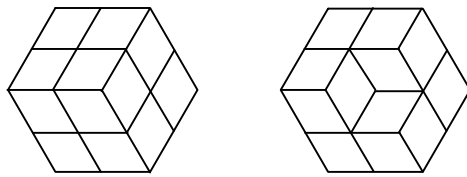
Nun wird es Zeit zum Anfang unserer Ausführungen zurückzukehren:

Und wenn wir uns in der Welt von 5 Dimensionen sehen oder fühlen, werden wir sehen, dass die Welt von 4 Dimensionen in Wirklichkeit nicht existiert und nie existiert hat; dass sie eine Schöpfung unserer eigenen Phantasie war, ein Phantom, eine optische Täuschung, ein Wahn – alles, was man will, nur eben nicht die Wirklichkeit.

HEX LÉON (8)

Die Spielobjekte HEX-LÉON werden durch drei gleiche Bauteile gebildet. Ein Bauteil besteht aus 2x4 Rhomben in zwei Ebenen. Der Mechanismus basiert auf der Kombination von Teilen in zwei Ebenen und zeichnet sich dadurch aus, dass die drei Bauteile gleichzeitig ineinander- oder auseinander- geschoben werden. Das sequentielle Zusammenbauen ist unmöglich.

Folgende Raster-Anordnungen der Rhomben in den beiden Ebenen sind möglich:



Je eine Ausführungsvariante zeigt Bild 14 sowie das Titelbild.

Bild 15 zeigt alle Teile bestehend aus vier Rhomben und deren Lage in einer Ebene, die miteinander kombiniert werden.

Von den vielen Kombinationen gibt es vermutlich 64 funktionierende Varianten mit den Rastern von 12 Rhomben in einer Ebene.

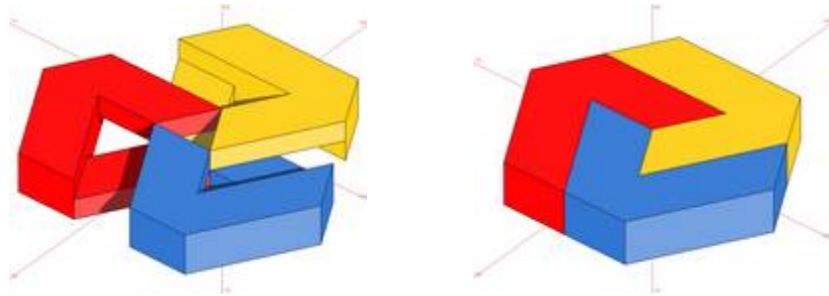


Bild 14

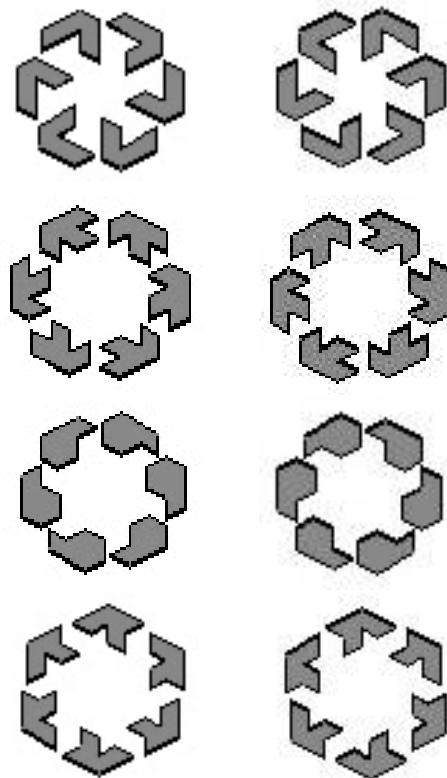


Bild 15

RHOMBO LÉON (9)

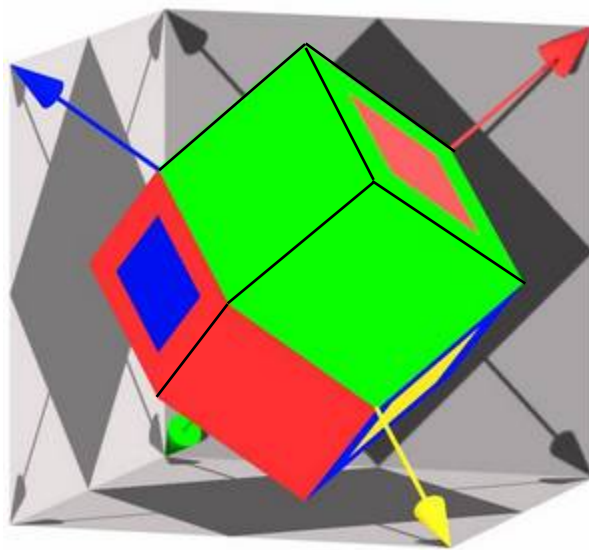


Bild 16

Das Puzzle Rhombo Léon besteht aus 2 rechten (grün, blau) und 2 linken (rot, gelb) Teilen im 4-dimensionalen Raum.



Bild 17

Bild 18: Ansicht von

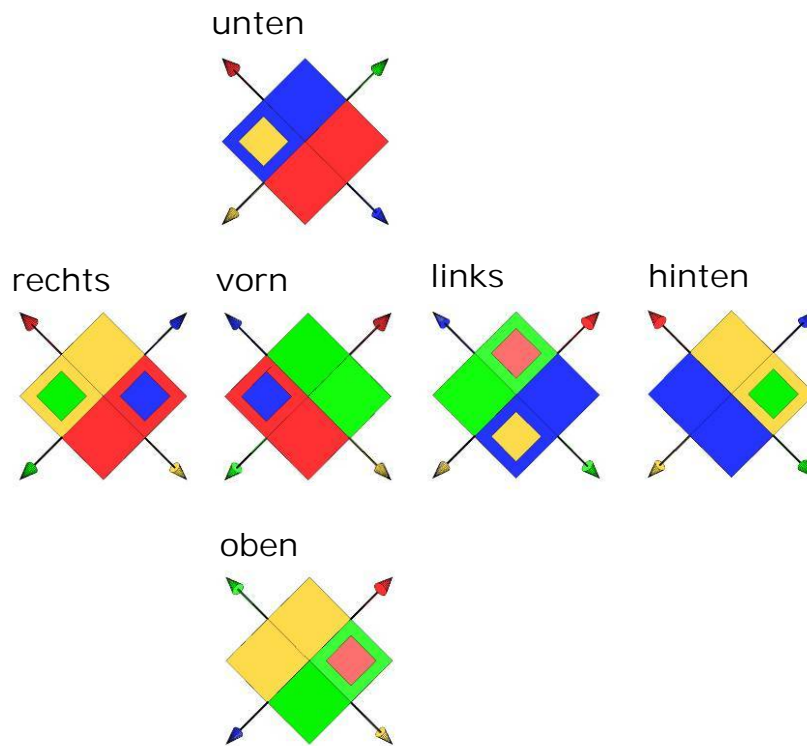
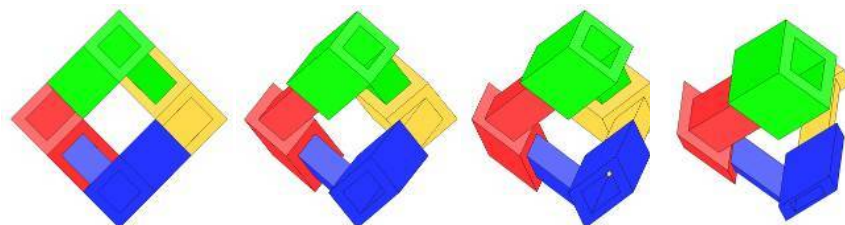


Bild 19: Puzzle Rhombo Léon offen

Ansicht von links, dann schrittweise verdreht



- (1) Flächenland, Edwin A. Abbott, dtv/Klett-Cotta
- (2) Die Wunderwelt der vierten Dimension, Rudy Rucker, Scherz Verlag
- (3) Speculations on the Fourth Dimension, Selected Writings of Charles H. Hinton, Edited by Rudolf v.B. Rucker, Dover Publications
- (4) Dimensionen, Figuren und Körper in geometrischen Räumen, Thomas F. Banchoff, Spektrum der Wissenschaft
- (5) Die Rhomboeder-Bausteine des Albert Gübeli, Christoph Pöppe, Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft
- (6) Würfeleien, Albert Gübeli, albinegri Schriftenreihe Nr.4d
- (7) Vom Würfel zum Rhombododekaeder, Albert Gübeli und Georges Wick, albinegri Schriftenreihe Nr.1d
- (8) Puzzle HEX LÉON, Bezugsquelle <http://www.shapeways.com/shops/albinegri>
- (9) Puzzle RHOMBO LÉON, Bezugsquelle <http://www.shapeways.com/shops/albinegri>